Contrôle TD n° 2

L1/S2, Mathématiques, groupe D

29 Mars 2024

Exercice 1

Trouver les limites suivantes

1. **(2 pts)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}-(x+4)\right)$

   Pour cette limite on fait ce qui suit

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{x^2-2x+3}-(x+4)\right) &= \left(\sqrt{x^2-2x+3}-(x+4)\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2-2x+3}+(x+4)\right)}{\left(\sqrt{x^2-2x+3}+(x+4)\right)}\\
&= \frac{x^2-2x+3-(x+4)^2}{\sqrt{x^2-2x+3}+(x+4)}\\
&= \frac{x^2-2x+3-(x^2+8x+16)}{\sqrt{x^2-2x+3}+(x+4)}\\
&= \frac{-10x-16}{\sqrt{x^2-2x+3}+(x+4)}\\
&= \frac{x\left(-10-\frac{16}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+\left(1+\frac{4}{x}\right)\right)} = \frac{-10-\frac{16}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1+\frac{4}{x}}
\end{aligned}$$

   alors

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}-(x+4)\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{-10-\frac{16}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1+\frac{4}{x}}\\
&= -5.
\end{aligned}$$

2. **(2 pts)** $\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3+2x+3}{5x^3+x^2+5x}$

   Comme $\lim_{x\to\infty}-x^3+2x+3=-\infty$ et $\lim_{x\to\infty}5x^3+x^2+5x=\infty$, on a une forme indeterminée $-\infty/\infty$. Si on factorise par x^3 le numérateur et dénominateur on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{-x^3+2x+3}{5x^3+x^2+5x} &= \frac{x^3\left(-1+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}{x^3\left(5+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}\\
&= \frac{-1+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{5+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{-x^3+2x+3}{5x^3+x^2+5x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(-1+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}{x^3\left(5+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-1+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{5+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}} \\
&= \frac{\lim_{x\to\infty} -1+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{\lim_{x\to\infty} 5+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}} \\
&= -\frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Exercice 2

1. **(3 pts)** En utilisant des fractions partielles, déterminer la primitive suivante

$$\int \frac{1}{(x+2)(x-1)}dx$$

On commence pour trouver la décomposition en fractions partielles de $\dfrac{1}{(x+2)(x-1)}$. Soient a et b deux constantes tels que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x+2)(x-1)} &= \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-1} \\
&= \frac{a(x-1)+b(x+2)}{(x+2)(x-1)} \\
&= \frac{(a+b)x+(2b-a)}{(x+2)(x-1)}.
\end{aligned}$$

Donc on obtient le système d'equations $a+b=0$ et $2b-a=1$, puis $a=-1/3$ et $b=1/3$. Finalement,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x+2)(x-1)}dx &= \int \left(\frac{-1}{3(x+2)} + \frac{1}{3(x+1)}\right) dx \\
&= \frac{-1}{3}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} \\
&= \frac{-1}{3}\ln|x+2| + \frac{1}{3}\ln|x-1| + c \\
&= \frac{1}{3}\ln\left(\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\right) + c
\end{aligned}$$

2. **(3 pts)** Déterminer la primitive $\int x^3 \ln|x| dx$.

On va utiliser intégration par parties. Soit $u=\ln|x|$ et $v'=x^3$, alors $u'=\dfrac{1}{x}$ et $v=\frac{x^4}{4}$, d'où on obtient

$$\begin{aligned}\int x^3 \ln|x| dx &= \frac{x^4}{4}\ln|x| - \int \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}dx \\ &= \frac{x^4\ln|x|}{4} - \frac{1}{4}\int x^3 dx \\ &= \frac{x^4\ln|x|}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{4}\right) + c \\ &= \frac{x^4\ln|x|}{4} - \frac{x^4}{16} + c\end{aligned}$$

3. **(2 pts)** On pose $I = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{\sin(x)}{\sin(x)-\cos(x)}dx$ et $J = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}dx$. Calculer $I+J$, $I-J$ et en déduire I et J.

On commence par $I-J$:

$$\begin{aligned}I-J &= \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{\sin(x)}{\sin(x)-\cos(x)}dx - \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}dx \\ &= \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}dx \\ &= \int_{-\pi/6}^{\pi/6} 1dx \\ &= \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

Pour $I+J$ on a

$$\begin{aligned}I+J &= \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{\sin(x)}{\sin(x)-\cos(x)}dx + \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}dx \\ &= \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}dx.\end{aligned}$$

Soit $u(x) = \sin(x) - \cos(x)$ alors $u'(x) = \cos(x) + \sin(x)$. Si $b = \pi/6$ alors $u(b) = \sin(\pi/6) - \cos(\pi/6) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ et si $a = -\pi/6$ on obtient $u(a) = \sin(-\pi/6) - \cos(-\pi/6) = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

$$\begin{aligned}I+J &= \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}dx \\ &= \int_{-\frac{1+\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1-\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{u} \\ &= \ln|u|\Big|_{-\frac{1+\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1-\sqrt{3}}{2}} = \ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right).\end{aligned}$$

Finalement, on a le système

$$I - J = \frac{\pi}{3},\ \ I + J = \ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)$$

alors $I = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)$ et $J = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right) - \frac{\pi}{6}$.

Exercice 3

Soit $f(x,y) = x^2 - 2x + y^3 - 3y$ définie sur l'ensemble $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

1. **(2 pts)** Calculer les dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

   Les dérivées partielles de f par rapport x et y sont

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3.$$

2. **(2 pts)** Déterminer les points critiques de f.

   Les points $(x,y) \in \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ qui sont critiques sont où $\nabla f(x,y) = 0$, alors $2x - 2 = 0$ et $3y^2 - 3 = 0$. Ici on obtient que $x = 1$, et $y = \pm 1$. Puis que $(1,-1) \notin \Omega$, alors f a un seule point critique $(x,y) = (1,1)$.

3. **(2 pts)** Expliciter la matrice hessiene $\nabla^2 f(x,y)$ de f en (x,y).

   La matrice est donnée par

   $$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y. \end{pmatrix}$$

   Le déterminante de la matrice es $\det(\nabla^2 f(x,y)) = 12y > 0$ pour tout point $(x,y) \in \Omega$, alors es définie positive.

4. **(2 pts)** Etudier la convexité/concavité de la fonction f sur l'ensemble Ω et déterminer la nature de ces points critiques (extrema locaux, globaux, ...).

   Comme la matrice hessienne est définie positive, alors la fonction es convexe dans le domaine Ω, donc le point critique es un minumum global.