Contrôle TD n° 1 : Version corrigée

Licence 1$^{\text{er}}$ année, Math2C, groupe MI2-M

20 Février 2024

Exercice 1

Trouver la primite de les fonctions suivantes et indiquer le domaine de définition de chaque primitive:

1. $f(x) = x^3 e^{x^2}$ (Indication: utiliser le changement de variable $u(x) = x^2$ puis intégration par parties).

   Solution : Soit le changement de variable $u = x^2$, ça implique que $du = 2xdx$ (en fait $du/2 = xdx$), alors on obtient que

   $$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int u e^u du.$$

   En faisant intégration par parties, on pose $v = u$ et $w' = e^u$, donc $v' = 1$ et $w = e^u$, puis

   $$\int u e^u du = u e^u - \int e^u du = e^u (u - 1) + c.$$

   Finalement, $\displaystyle\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{e^{x^2}}{2}\left(x^2 - 1\right) + c$, où c est une constante réelle. Clairement le domaine de définition est $D = \mathbb{R}$.

2. $g(x) = \dfrac{6x}{(x+1)(x-2)}$ (Indication: utiliser fractions partielles)

   Solution : On écrit $\dfrac{6x}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-2}$, alors

   $$\begin{aligned} \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} &= \frac{a(x-2) + b(x+1)}{(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{x(a+b) + (-2a+b)}{(x+1)(x-2)} \end{aligned}$$

   d'où on obtient le système d'équations

   $$\begin{cases} a + b = 6 \\ -2a + b = 0 \end{cases}$$

   c'est-à-dire $a = 2$ et $b = 4$. Donc

   $$\begin{aligned} \int \frac{8}{(x-1)(x+3)} dx &= 2\int \frac{dx}{x+1} + 4\int \frac{dx}{x-2} \\ &= 2\ln(|x+1|) + 4\ln(|x-2|) + c \\ &= \ln\left((x+1)^2 (x-2)^4\right) + c, \end{aligned}$$

   où c est une constante réelle. Domaine de définition $D = \mathbb{R} \backslash \{-1, 2\}$.

Exercice 2

Trouver la solution générale des EDO suivantes:

1. $y' + x(\sinh(x))y = 0$.

Solution : L'équation est de variables séparées (si $y(x) \neq 0$)

$$
\begin{aligned}
\frac{y'}{y} = -x\sinh(x) \iff \int \frac{dy}{y} &= -\int x\sinh(x)dx \\
\ln(|y|) &= -x\cosh(x) + \int \cosh(x)dx \\
\ln(|y|) &= -x\cosh(x) + \sinh(x) + c \\
|y(x)| &= Ke^{-x\cosh(x)+\sinh(x)}
\end{aligned}
$$

où K est une constante positive. Alors la solution générale est $y(x) = Ke^{-x\cosh(x)+\sinh(x)}$ où maintenant K est un constante réelle.

Addendum : Noter que si on a le problème de Cauchy

$$
\begin{cases} y' + x\sinh(x)y = 0 \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}
$$

si la condition initiale y_0 est negative, alors K es negative et si $y_0 > 0$ alors $K > 0$. Si la condition initial est égale à 0 alors on a une solution constante nulle.

Exercice 3

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants

$$
(1) \begin{cases} (1+x^2)y' + y = 1 \\ y(0) = 2, \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} (1+x^2)y' + y = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}
$$

Solution : L'équation (2) admet une solution constante $y(x) = 1$. Pour l'équation (1) on separe les variables

$$
\begin{aligned}
\frac{y'}{1-y} = \frac{1}{1+x^2} \iff \int \frac{dy}{1-y} &= \int \frac{dx}{1+x^2} \\
-\ln(|1-y|) &= \arctan(x) + c
\end{aligned}
$$

Evaluant dans $x = 0$ on obtient que $c = 0$. Alors $|1-y| = e^{-\arctan(x)}$, comme $y(0) = 2$ donc $1 - y(0) < 0$, en particulière il existe un voisinage I contenant $x = 0$ où $1 - y(x) < 0$ pour tout $x \in I$. Dans cet cas on obtient $y(x) = e^{-\arctan(x)} + 1$.

Addendum : Les solutions sont clairement continues dans $D = \mathbb{R}$. Ci dessous, vous trouverez le champ de tangentes associé à l'équation, avec la representation graphique des solution.

Figure 1: Champ de tangentes avec la solution pour $y(0) = 1$.

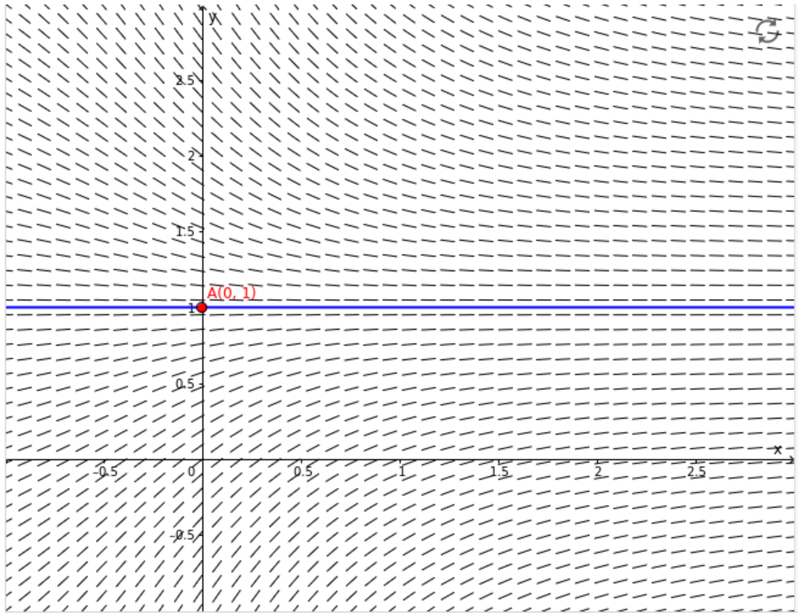

Figure 2: Champ de tangentes avec la solution pour $y(0) = 2$.