Contrôle TD n° 2

Licence 1er année, Math2C

27 mars 2024

Exercice 1

Résoudre les équations differentielles suivantes:

1. $y'' + y' - 6y = xe^{-x} + e^{4x}$;

   Le polynôme associé à cette équation est $P(r) = r^2 + r - 6$ d'où on obtient les racines $r_1 = -3$ et $r_2 = 2$, alors la solution homogène est $y_h(x) = c_1e^{-3x} + c_2e^{2x}$. Puis que $\alpha_1 = -1$ et $\alpha_2 = 4$ ne sont pas des racines de $P(r)$, on a que la solution particulière est de la forme

$$\begin{aligned} y_p(x) &= y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) \\ &= (ax+b)e^{-x} + ce^{4x}. \end{aligned}$$

   Pour déterminer les constantes a, b et c on fait de qui suit :

$$\begin{aligned} y'_{p_1}(x) &= -(ax+b)e^{-x} + ae^{-x} \\ y''_{p_1}(x) &= (ax+b)e^{-x} - 2ae^{-x}, \end{aligned}$$

   alors,

$$\begin{aligned} y''_{p_1}(x) + y'_{p_1}(x) - 6y_{p_1}(x) &= (ax+b)e^{-x} - 2ae^{-x} - (ax+b)e^{-x} + ae^{-x} - 6(ax+b)e^{-x} \\ &= -6(ax+b)e^{-x} - ae^{-x} \\ &= (-6ax - 6b - a)e^{-x} = xe^{-x}. \end{aligned}$$

   Alors $-6a = 1$ et $-6b - a = 0$, c'est-à-dire $y_{p_1}(x) = \left(-\frac{x}{6} + \frac{1}{36}\right)e^{-x}$. Pour $y_{p_2}(x)$ on a $y'_{p_2}(x) = 4ce^{4x}$ et $y''_{p_2}(x) = 16ce^{4x}$, alors

$$\begin{aligned} y''_{p_2}(x) + y'_{p_2}(x) - 6y_{p_2}(x) &= (16c + 4c - 6c)e^{4x} \\ &= 14ce^{4x} = e^{4x}. \end{aligned}$$

   Alors on obtient la solution

$$y(x) = c_1e^{-3x} + c_2e^{2x} + \left(-\frac{x}{6} + \frac{1}{36}\right)e^{-x} + \frac{1}{14}e^{4x}.$$

2. $2yy' + \dfrac{1+y^2}{x} = 0$;

Cette équation est de varibles separées, alors

$$\begin{aligned} 2yy' + \frac{1+y^2}{x} = 0 \iff & \frac{2yy'}{1+y^2} = -\frac{1}{x} \\ \implies & \ln(1+y^2) = -\ln|x| + c \\ \iff & \ln(1+y^2) = \ln|cx^{-1}| \\ \iff & 1+y^2 = c|x|^{-1} \\ \iff & y(x) = \pm\sqrt{\frac{c}{|x|} - 1}. \end{aligned}$$

1 Exercice 2

Considere l'équation differentielle $x^2y'' + 5xy' - 21y = 0$:

1. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions réelles de l'équation. Montrer que S est un espace vectoriel réel.

   Clarement $0 \in \mathcal{S}$. Soient $y_1, y_2 \in \mathcal{S}$ deux solutions et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On pose $y(x) := \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$, alors $y'(x) = \alpha y_1'(x) + \beta y_2'(x)$ et $y''(x) = \alpha y_1''(x) + \beta y_2''(x)$, si on remplace y dans l'équation

$$\begin{aligned} x^2y'' + 5xy' - 21y &= x^2\left(\alpha y_1'' + \beta y_2''\right) + 5x\left(\alpha y_1' + \beta y_2'\right) - 21\left(\alpha y_1 + \beta y_2\right) \\ &= \alpha \underbrace{\left(x^2y_1'' + 5xy_1' - 21y_1\right)}_{=0} + \beta \underbrace{\left(x^2y_2'' + 5xy_2' - 21y_2\right)}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Alors $y \in \mathcal{S}$.

2. En sachant que les solutions ont la forme $x \mapsto x^n$, où $n \in \mathbb{R}$, trouver une base de $\mathcal{S}$.

   Soit $y = x^n$ une solution, alors $y'(x) = nx^{n-1}$ et $y''(x) = n(n-1)x^{n-2}$. En utilisant les expression on a

$$\begin{aligned} x^2y'' + 5xy' - 21y &= x^2n(n-1)x^{n-2} + 5xnx^{n-1} - 21x^n \\ &= x^n\left(n(n-1) + 5n - 21\right) \\ &= x^n\left(n^2 + 4n - 21\right) & = 0, \end{aligned}$$

   d'où on obtient que $n^2 + 4n + 21 = 0$ alors $n_1 = -7$ et $n_2 = 3$. Donc la solution de l'équation est

$$y(x) = \frac{c_1}{x^7} + c_2x^3.$$

   Une base pour $\mathcal{S}$ est $\{x^{-7}, x^3\}$.

3. Trouver la solution de $x^2y'' + 5xy' - 21y = x^2$

   En sachant que las solutions de l'équation homogène associée est $y_1(x) = \frac{1}{x^7}$ et $y_2(x) = x^3$, on peut utiliser la méthode du wrosnkien. Dans sa forme canonique, la fonction $q(x)$ est égale à 1, et le wronskien est

$$W[y_1, y_2](x) = -\frac{-7}{x^8} \cdot x^3 + \frac{1}{x^7} \cdot 3x^2 = \frac{10}{x^5}$$

Puis

$$\begin{aligned}
u(x) &= -\int^x \frac{y_2(t)q(t)}{W[y_1, y_2](t)}dt \\
&= -\int^x \frac{t^3 \cdot 1 \cdot t^5}{10}dt \\
&= -\frac{x^9}{90} \\
v(x) &= \int^x \frac{y_1(t)q(t)}{W[y_1, y_2](t)}dt \\
&= \int^x \frac{-t^5}{10t^7}dt \\
&= \int^x \frac{1}{10t^2}dt = -\frac{1}{10x}
\end{aligned}$$

Alors la solution particulière est de la forme

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x) \\
&= -\frac{x^9}{90} \cdot \frac{1}{x^7} - \frac{1}{10x} \cdot x^3 = -\frac{x^2}{9}
\end{aligned}$$

et finalement, $y(x) = \dfrac{c_1}{x^7} + c_2x^3 - \dfrac{x^2}{9}$.

Exercice 2

Résoudre le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2. \end{cases} \tag{1}$$

œLe polynôme associé à l'équation est $P(r) = r^2 + 2r - 3$, alors les racines sont $r_1 = 1$ et $r_2 = -3$, donc la solution est

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-3x}$$

Pour déterminer les constantes c_1 et c_2, on dérive la fonction $y(x)$ en résultant $y'(x) = c_1e^x - 3c_2e^{-3x}$, alors

$$\begin{aligned}
y(0) &= c_1 + c_2 = 1 \\
y'(0) &= c_1 - 3c_2 = 2
\end{aligned}$$

alors $c_2 = -1/4$ et $c_1 = 5/4$, puis $y(x) = \dfrac{5e^{-x}}{4} - \dfrac{e^{3x}}{4}$