Contrôle TD n° 1 : Version corrigée

Licence 1$^{\text{er}}$ année, Math2C, groupe MP2-MP

21 Février 2024

Exercice 1

Trouver la primite de les fonctions suivantes et indiquer le domaine de définition de chaque primitive:

1. $f(x) = x^5 e^{x^3}$ (Indication: utiliser le changement de variable $u(x) = x^3$ puis intégration par parties).

   Solution : Soit le changement de variable $u = x^3$, ça implique que $du = 3x^2 dx$ (en fait $du/3 = x^2 dx$), alors on obtient que

   $$\int x^5 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int u e^u du.$$

   En faisant intégration par parties, on pose $v = u$ et $w' = e^u$, donc $v' = 1$ et $w = e^u$, puis

   $$\int u e^u du = u e^u - \int e^u du = e^u (u - 1) + c.$$

   Finalement, $\displaystyle\int x^5 e^{x^3} dx = \frac{e^{x^3}}{3}\left(x^3 - 1\right) + c$, où c est une constante réelle. Clairement le domaine de définition est $D = \mathbb{R}$.

2. $g(x) = \dfrac{8}{(x-1)(x+3)}$ (Indication: utiliser fractions partielles)

   Solution : On écrit $\dfrac{8}{(x-1)(x+3)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+3}$, alors

   $$\begin{aligned} \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} &= \frac{a(x+3) + b(x-1)}{(x-1)(x+3)} \\ &= \frac{x(a+b) + (3a-b)}{(x-1)(x+3)} \end{aligned}$$

   d'où on obtient le système d'équations

   $$\begin{cases} a + b = 0 \\ 3a - b = 8 \end{cases}$$

   c'est-à-dire $a = 2$ et $b = -2$. Donc

   $$\begin{aligned} \int \frac{8}{(x-1)(x+3)} dx &= 2 \int \frac{1}{x-1} dx - 2 \int \frac{1}{x+3} dx \\ &= 2\ln(|x-1|) - 2\ln(|x+3|) + c \\ &= \ln\left(\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^2\right) + c, \end{aligned}$$

   où c est une constante réelle. Domaine de définition $D = \mathbb{R}\backslash\{1, -3\}$.

Exercice 2

Trouver la solution générale des EDO suivantes:

1. $y' + x(\sin(x))y = 0$.

   Solution : L'équation est de variables séparées (si $y(x) \neq 0$)

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} = -x\sin(x) \iff \int \frac{dy}{y} &= -\int x\sin(x)dx \\ \ln(|y|) &= x\cos(x) - \int \cos(x)dx \\ \ln(|y|) &= x\cos(x) - \sin(x) + c \\ |y(x)| &= Ke^{x\cos(x)-\sin(x)}\end{aligned}$$

où K est une constante positive. Alors la solution générale est $y(x) = Ke^{x\cos(x)-\sin(x)}$ où maintenant K est un constante réelle.

Addendum : Noter que si on a le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + x\sin(x)y = 0 \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

si la condition initiale y_0 est negative, alors K es negative et si $y_0 > 0$ alors $K > 0$. Si la condition initial est égale à 0 alors on a une solution constante nulle.

Exercice 3

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants

$$(1)\ \begin{cases}(1+x^2)y' + y = 2 \\ y(0) = 2,\end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases}(1+x^2)y' + y = 2 \\ y(0) = 1\end{cases}$$

Solution : L'équation (1) admet une solution constante $y(x) = 2$. Pour l'équation (2) on separe les variables

$$\begin{aligned}\frac{y'}{2-y} = \frac{1}{1+x^2} \iff \int \frac{dy}{2-y} &= \int \frac{dx}{1+x^2} \\ -\ln(|2-y|) &= \arctan(x) + c\end{aligned}$$

Evaluant dans $x = 0$ on obtient que $c = 0$. Alors $|2-y| = e^{-\arctan(x)}$, comme $y(0) = 1$ donc $2 - y(0) > 0$ en particulière il existe un voisinage I contenant $x = 0$ où $2 - y(x) > 0$ pour tout $x \in I$. Dans cet cas on obtient $y(x) = 2 - e^{-\arctan(x)}$.

Addendum : Les solutions sont clairement continues dans $D = \mathbb{R}$. Ci dessous, vous trouverez le champ de tangentes associé à l'équation, avec la representation graphique des solution.

Figure 1: Champ de tangentes avec la solution pour $y(0) = 2$.

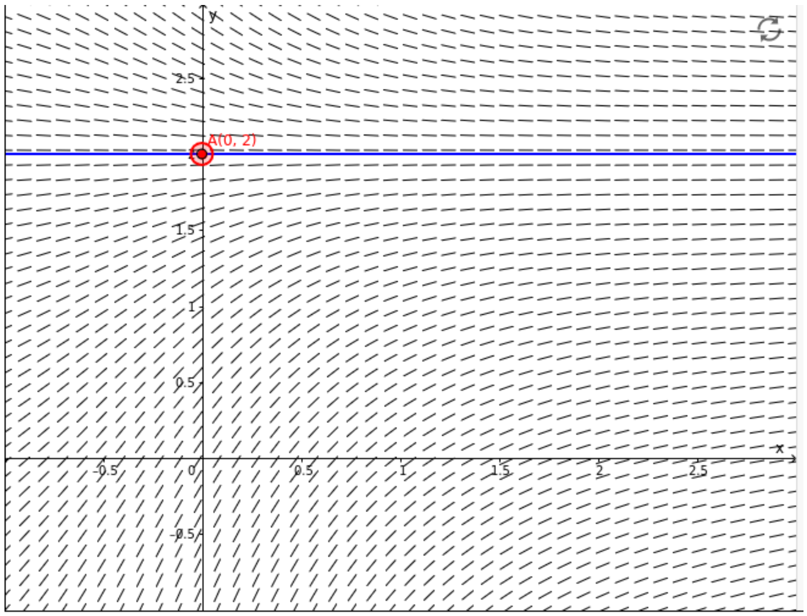

Figure 2: Champ de tangentes avec la solution pour $y(0) = 1$.