Corrigé TD n° 1

Math1C

Février 2024

Exercice 2

1. Domaine de la fonction $D =]0, \infty[$ Soit $u(x) = \ln(x)$, alors on obtient $du = dx/x$, c'est-à-dire $e^u du = dx$. On remplace et on obtient $\int \cos(\ln(x))dx = \int e^u \cos(u)du$. En utilisant la formule obtenu dans l'exercice 1.1 pour $a = -1$ et $b = 1$ ça nous donne que

$$\begin{aligned}
\int \cos(\ln(x))dx &= \int e^u \cos(u)du \\
&= \frac{\cos(u) + \sin(u)}{2} e^u + C \\
&= \frac{\cos(\ln(x)) + \sin(\ln(x))}{2} e^{\ln(x)} + C \\
&= \frac{x}{2} \left(\cos(\ln(x)) + \sin(\ln(x))\right) + C.
\end{aligned}$$

2. Soit $u(x) = 1 + x^2$ (ou bien $u - 1 = x^2$), alors $u'(x) = 2x$. De cette forme, en remplaçant les expressions on obtient

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{(u-1)du}{2\sqrt{u}} \\
&= \int \left(\frac{\sqrt{u}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{u}} \right) du \\
&= \frac{u^{3/2}}{3} - \sqrt{u} + c \\
&= \frac{(1+x^2)^{3/2}}{3} - \sqrt{1+x^2} + c
\end{aligned}$$

3. Le domaine de la fonction est $D =]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$. Soit $u(x) = \arccos(1/x)$ (c'est-à-dire $\cos^2(u) = 1/x^2$), alors par la règle de la chaine on a que $u'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-(1/x)^2}} \cdot \frac{-1}{x^2} =$

$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. D'ici on peut obtenir le suivant

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx &= \int (x^2-1)\cdot \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx \\
&= \int \left(1-\frac{1}{x^2}\right) \overbrace{\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx}^{du} \\
&= \int \left(\sec^2(u)-1\right) du \\
&= \tan(u) - u + c \\
&= \frac{\sqrt{1-\cos^2(u)}}{\cos(u)} - u + c \\
&= \frac{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(1/x))}}{\cos(\arccos(1/x))} - \arccos(1/x) + c \\
&= x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - \arccos(1/x) + c \\
&= \sqrt{x^2-1} - \arccos(1/x) + c.
\end{aligned}$$

Ici on a deux constantes c en dépendent de les intervalles $]-\infty,-1[$ et $]1,\infty[$.

4. Vu au cours.

5. Soit $u(x) = \arctan(x/3)$ alors $u'(x) = \frac{3}{x^2+9}$. Puis que $u = \arctan(x/3)$ on a $3\tan(u) = x$. D'ici on obtient que $x^2 = 9\tan^2(u)$ ou finalement on conclut que $9+x^2 = 9(1+\tan^2(u)) = 9\sec^2(x)$. Donc, si on remplace nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(9+x^2)^2} &= \int \frac{1}{9+x^2}\cdot\frac{1}{9+x^2}dx \\
&= \int \frac{1}{9\sec^2(u)}\frac{du}{3} \\
&= \int \frac{\cos^2(u)}{27}du
\end{aligned}$$

En utilisant la formule trigonométrique $\cos^2(u) = (1+\cos(2u))/2$ on a

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(9+x^2)^2} &= \int \frac{\cos^2(u)}{27}du \\
&= \frac{1}{54}\int (1+\cos(2u))\,du \\
&= \frac{1}{54}\left(u+\frac{\sin(2u)}{2}\right)+c \\
&= \frac{1}{54}\left(\arctan(x/3)+\frac{\sin(2\arctan(x/3))}{2}\right)+c
\end{aligned}$$

En considérant les formules trigonométriques $\sin(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$, $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$

d'où on obtient

$$\begin{aligned}\sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x)\\ &= 2\frac{\tan(x)}{1+\tan^2(x)}\end{aligned}$$

alors $\sin(2\arctan(x/3)) = \frac{6x}{9+x^2}$. En particulière

$$\int \frac{dx}{(9+x^2)^2} = \frac{1}{54}\left(\arctan(x/3) + \frac{3x}{9+x^2}\right) + c.$$

Exercice 3

1. La première chose à noter est que la fonction $\tan(x)$ est définite dans l'ensemble $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}]-\pi/2+k\pi, \pi/2+k\pi[$. En utilisant l'identité trigonométrique $\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$, on note le suivant

$$\begin{aligned}\tan^2(x) &= \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\\ &= \frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} - 1\end{aligned}$$

alors on obtient

$$\begin{aligned}\int \tan^2(x)dx &= \int\left(\frac{1}{\cos^2(x)} - 1\right)dx\\ &= \tan(x) - x + C_k\end{aligned}$$

oú C_k est une constante qui dépend de l'intervalle.

2. Fait au TD.

3. D'après la formule trigonométrique $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$ on obtient que $\sin(x)\cos(3x) = \frac{1}{2}(\sin(4x) + \sin(-2x))$ ou bien $\sin(x)\cos(3x) = \frac{1}{2}(\sin(4x) - \sin(2x))$. Clairement cette fontion et bien définie dans $I = \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\int \sin(x)\cos(3x)dx &= \frac{1}{2}\int(\sin(4x) - \sin(2x))\,dx\\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(4x)}{4} + \frac{\cos(2x)}{2}\right) + C\end{aligned}$$

4. D'abord, le polynôme $2x^2+3x+4$ n'admets pas des racines réelles, alors la fonction est

bien définie dans $I = \mathbb{R}$. Puis, on factorise cet polynôme d'une manière conveniente

$$\begin{aligned}
2x^2 + 3x + 4 &= 2\left(x^2 + \frac{3x}{2}\right) + 4 \\
&= 2\left(x^2 + \frac{3x}{2} + \frac{9}{16} - \frac{9}{16}\right) + 4 \\
&= 2\left(x^2 + \frac{3x}{2} + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{8} + 4 \\
&= 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{8} \\
&= \frac{23}{8}\left(\frac{16}{23}\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + 1\right) = \frac{23}{8}\left(\left(\frac{4x+3}{\sqrt{23}}\right)^2 + 1\right).
\end{aligned}$$

En suit, on continue avec

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{2x^2+3x+4} &= \frac{x + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}}{2x^2+3x+4} \\
&= \frac{x + \frac{3}{4}}{2x^2+3x+4} + \frac{1}{4(2x^2+3x+4)} \\
&= \underbrace{\frac{4x+3}{4(2x^2+3x+4)}}_{f(x)} + \underbrace{\frac{2}{23\left(\left(\frac{4x+3}{\sqrt{23}}\right)^2 + 1\right)}}_{g(x)}.
\end{aligned}$$

Pour la primitive de $f(x)$, on considère le changement de variable $u(x) = 2x^2+3x+4$, alors $u'(x) = 4x+3$ puis

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x+3}{4(2x^2+3x+4)} dx &= \frac{1}{4}\int \frac{4x+3}{2x^2+3x+4} dx \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{du}{u} = \frac{\ln(|u|)}{4} + c = \frac{\ln(2x^2+3x+4)}{4} + c.
\end{aligned}$$

Pour la primitive de $g(x)$, on considère le changement de variable $v(x) = \frac{4x+3}{\sqrt{23}}$ et donc $v'(x) = \frac{4}{\sqrt{23}}$. Finalement,

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{23\left(\left(\frac{4x+3}{\sqrt{23}}\right)^2 + 1\right)} dx &= \frac{1}{2\sqrt{23}}\int \frac{dv}{1+v^2} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{23}} \arctan(v) + c \\
&= \frac{1}{2\sqrt{23}} \arctan\left(\frac{4x+3}{\sqrt{23}}\right) + c.
\end{aligned}$$

Donc on conclut que

$$\int \frac{x+1}{2x^2+3x+4} dx = \frac{\ln(2x^2+3x+4)}{4} + \frac{1}{2\sqrt{23}} \arctan\left(\frac{4x+3}{\sqrt{23}}\right) + c$$

5. Pour cette fonction, nous notons ce qui suit

$$\begin{aligned}\frac{\cos^3(x)}{1-\sin(x)} &= \frac{\cos(x)\cos^2(x)}{1-\sin(x)}\\ &= \frac{\cos(x)(1-\sin^2(x))}{1-\sin(x)}\\ &= \frac{\cos(x)(1-\sin(x))(1+\sin(x))}{1-\sin(x)}\\ &= \cos(x)(1-\sin(x)).\end{aligned}$$

La function peut être prolonguée pour tout nombre réel par continuité.

$$\begin{aligned}\int \cos(x)(1-\sin(x))dx &= \int \cos(x) - \int \cos(x)\sin(x)dx\\ &= \sin(x) - \frac{\sin^2(x)}{2} + C.\end{aligned}$$

6. On considère l'astuce suivante: si $x \geq 3$, on pose $u(x) = \text{arccosh}(x/3)$ alors $u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^9 - 9}}$ et $x = 3\cosh(u)$ (en particulière $x^2 = 9\cosh^2(u)$). De cette forme on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}} &= \int \frac{du}{9\cosh^2(u)}\\ &= \frac{\tanh(u)}{9} + c = \frac{\tanh(\text{arccosh}(x/3))}{9} + c\end{aligned}$$

Comme $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ alors $\tanh(\text{arccosh}(x/3)) = \frac{3\sinh(\text{arccosh}(x/3))}{x}$. Du coup, $\sinh(\text{arccosh}(x/3)) = \frac{\sqrt{x^2-9}}{3}$ finalement,

$$\begin{aligned}\frac{\tanh(\text{arccosh}(x/3))}{9} + c &= \frac{\sinh(\text{arccosh}(x/3))}{3x} + c\\ &= \frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + c\end{aligned}$$

Pour $x \leq -3$ on considère $u(x) = \text{arccosh}(-x/3)$ et on fait pareil au cas précédant. Domaine de la fonction est $D =]-\infty, -3[\cup]3, \infty[$.