Corrigé TD n° 3

Math1C

Février 2024

Exercice 4

5) On considère l'équation des variables separées. En utilisant la condition initiale ($y(2) = 3$), il existe un voisinage I contenant $x_0 = 2$ tel que $y(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors

$$\begin{aligned} y' = \frac{2x}{y(1+x^2)} &\iff yy' = \frac{2x}{1+x^2} \\ &\implies \int y dy = \int \frac{2x}{1+x^2} dx \\ &\implies \frac{y^2}{2} = \ln(1+x^2) + c \end{aligned}$$

évualant dans la condition initiale on obtient

$$\frac{y(0)^2}{2} = \ln(5) + c \implies c = \frac{9}{2} - \ln(5)$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{2} = \ln(1+x^2) - \ln(5) + \frac{9}{2} &\iff y^2 = 2\ln(1+x^2) - 2\ln(5) + 9 \\ |y(x)| &= \sqrt{\ln\left(\frac{(1+x^2)^2}{25}\right) + 9} \end{aligned}$$

comme $y(2) = 3 > 0$ on obtient finalement

$$y(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{(1+x^2)^2}{25}\right) + 9}.$$

On note aussi que $\frac{(1+x^2)^2}{25} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $\ln(1/25) > -9$, alors l'intervalle de definition I est $I = \mathbb{R}$.

6) Comme dans le cas précédant, l'équation est de variables separées, donc

$$\begin{aligned} y' = \frac{\tan(y)x}{1-x^2} &\iff \frac{\cos(y)}{\sin(y)} y' = \frac{x}{1-x^2} \\ &\implies \int \frac{\cos(y)}{\sin(y)} dy \int \frac{x}{1-x^2} dx \\ &\iff \ln(|\sin(y)|) = -\ln(|1-x^2|) + c \end{aligned}$$

Par la condition initiale $y(0) = \pi/4$ on a que $\ln(\sqrt{2}/2) = \ln(1) + c \Longrightarrow c = \ln(\sqrt{2}/2)$. Alors

$$\begin{aligned}\ln(|\sin(y)|) = -\frac{1}{2}\ln(|1-x^2|) + \ln(\sqrt{2}/2) &\iff |\sin(y)| = e^{-\frac{1}{2}\ln(|1-x^2|)+\ln(\sqrt{2}/2)} \\ &\iff |\sin(y)| = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

On peut assumit que la solution y est positive dans un intervalle I contenant $x_0 = 0$, alors

$$\begin{aligned}\sin(y(x)) &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1-x^2}} \\ y(x) &= \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1-x^2}}\right)\end{aligned}$$

Pour déterminer l'intervalle on note que

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1-x^2}} \leq 1 \\ \iff &\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sqrt{1-x^2} \\ \iff &\frac{1}{2} \leq 1 - x^2 \\ \iff &x^2 \leq \frac{1}{2} \\ \iff &|x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

donc $I = \left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ (dans cet cas on considère l'intervalle ouvert).